Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von **F. Mertens.**

Die in den Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen auftretende Grösse q lässt sich, wie Herr Weierstrass gezeigt hat[1], in eine nach ganzen positiven Potenzen des Quadrats k^2 des Moduls fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle Werthe von k^2 mit die Einheit nicht übersteigendem absoluten Betrage convergirt. Ich will hier auf denselben Gegenstand, welcher mich zur Zeit des Erscheinens des ersten Bandes von Jacobi's Werken beschäftigt hat, nur zurückkommen, um zu zeigen, wie man die erwähnte Reihe unmittelbar aus dem Theorema II Art. 37 der Fundamenta nova erhält.

Setzt man $k^2 = t$

$$\left.\begin{aligned} t^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{t}{4}+\frac{1.3}{2\cdot 4}\frac{t^2}{6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{t^3}{8}+\quad\right)^4 &= \\ = \frac{1}{t^2}(1-\sqrt{1-t})^4 &= T \\ T^p = A^{(p)}_{2p}\, t^{2p} + A^{(p)}_{2p+1}\, t^{2p+1} + A^{(p)}_{2p+2}\, t^{2p+2} + . & \end{aligned}\right\} \quad 1$$

so muss, wenn es eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihe $R(t)$ für q gibt, dieselbe nach dem obgenannten Satze der Fundamenta der Identität

$$R^2(t) = R(T) \tag{2}$$

genügen. Diese Functionalgleichung bestimmt aber auch die Reihe $R(t)$ vollständig, wenn man verlangt, dass letztere die Gestalt

$$R(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + .$$

---

[1] Sitzungsberichte der k. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1883.

haben und a_1 nicht $=0$ sein soll [die der obigen Identität genügenden Reihen, welche mit einer höheren als der ersten Potenz von t anfangen, sind einfach Potenzen von $R(t)$]. Es ist indessen bequemer den Logarithmus von $\frac{R(t)}{a_1 t}$ zu bestimmen.

Zu diesem Ende werde

$$2.\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6.\ \ .2n}.\frac{1}{n}=b_n \quad n=1,2,3,\ldots.$$

$$b_1 t+b_2 t^2+b_3 t^3+\ldots=\varphi(t)$$

gesetzt, wo, wie leicht zu sehen, $\varphi(t)$ die Reihe für $l\,\frac{16T}{t^2}$ ist, und eine Reihe

$$f(t)=C_1 t+C_2 t^2+C_3 t^3+\ldots$$

bestimmt, welche der Identität

$$2f(t)=f(T)+\varphi(t) \tag{3}$$

genügt. Die Gleichsetzung der Coëfficienten derselben Potenzen von t auf beiden Seiten ergibt, unter ν die grösste in $^1/_2 n$ enthaltene ganze Zahl verstanden, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
2C_1 &= b_1\\
2C_2 &= A_2^{(1)}C_1+b_2\\
2C_3 &= A_3^{(1)}C_1+b_3\\
2C_4 &= A_4^{(1)}C_1+A_4^{(2)}C_2+b_4\\
\\
2C_n &= A_n^{(1)}C_1+A_n^{(2)}C_2+\ \ldots+A_n^{(\nu)}C_\nu+b_n,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit deren Hilfe die unbekannten Coëfficienten $C_1, C_2, \ldots$ nach und nach bis zu jedem gewünschten Stellenzeiger berechnet werden können. Es erhellt unmittelbar, dass diese Coëfficienten alle positiv ausfallen, da ja b_1, $b_2, \ldots$ und alle Zahlen $A_\mu^{(p)}$ nach 1) positiv sind. Insbesondere wird

$$C_1=\frac{1}{2} \quad C_2=\frac{13}{64} \quad C_3=\frac{23}{192}\ldots$$

Die Addition der Gleichungen 4) ergibt, wenn man

$$C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n = f_n(t)$$
$$b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n = \varphi_n(t)$$
$$A_{2p}^{(p)} t^{2p} + A_{2p+1}^{(p)} t^{2p+1} + \ldots + A_n^{(p)} t^n = \Psi_n^{(p)}(t)$$

setzt und beachtet, dass die Reihen für $T, T^2, \ldots$ noch für $t = 1$ convergiren, weil ja die Reihe für $\sqrt{1-t}$ diese Eigenschaft hat, und die Summe 1 haben, dass ferner $\varphi(1) = l16$, dass also

$$\varphi_n(1) < l16 \quad \Psi_n^{(p)}(1) < 1$$

ist:

$$2f_n(1) = \varphi_n(1) + C_1 \Psi_n^{(1)}(1) + C_2 \Psi_n^{(2)}(1) + \ldots + C_\nu \Psi_n^{(\nu)}(1)$$
$$< l16 + f_\nu(1) < l16 + f_n(1).$$

Hieraus folgt:

$$f_n(1) < l16 \qquad 5)$$

und da in Folge dessen jeder Coëfficient C_μ unter $l16$ liegt, so convergirt die Reihe $f(t)$ für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag < 1 ist. Man kann indessen beweisen, dass $f(t)$ auch noch für $t = 1$ convergirt. Hiezu genügt der Nachweis, dass die Summe

$$F(n) = C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_s,$$

wo s irgend eine ganze positive über n liegende Zahl bezeichnet, von gewünschter Kleinheit wird, wenn n über eine anzugebende Grenze hinaus liegt.

Zunächst lässt sich darthun, dass allgemein

$$C_r < \frac{1}{r} \qquad r = 1, 2, 3, .$$

ist. Man hat nämlich

$$T^p = \frac{t^{2p}}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1-iz)^{4p}} - \frac{1}{(1+iz)^{4p}} \right] \frac{z\,dz}{1+z^2-t}$$

und demzufolge, wenn man $z = \sqrt{x}$ setzt und den Coëfficienten von t^n nimmt:

$$A_n^{(p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p}\right]\frac{dx}{(1+x)^{n+1}} \cdot \quad 6)$$

Ersetzt man die beiden Bestandtheile des zu integrirenden Elementes durch ihre absoluten Beträge, so wird

$$A_n^{(p)} < \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\,dx}{(1+x)^{n+1}}$$
$$< \frac{1}{n\pi}.$$

Aus 4) schliesst man dann

$$C_n < \frac{1}{2n\pi}(C_1 + C_2 + \ldots + C_\nu) + \frac{1}{2}\,b_n < \frac{1}{n}\left(\frac{l\,16}{2\pi} + \frac{1.3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)$$
$$< \frac{1}{n}.$$

Addirt man ferner die aus der letzten der Gleichungen 4) für die Stellenzeiger $n+1$, $n+2, \ldots s$ hervorgehenden Gleichungen, so ergibt sich

$$2\,F(n) = B^{(1)}\,C_1 + B^{(2)}\,C_2 + \ldots + B^{(\nu)}\,C_\nu +$$
$$+ C_{\nu+1}\,\Psi_s^{(\nu+1)}(1) + C_{\nu+2}\,\Psi_s^{(\nu+2)}(1) + \ldots + C_\sigma\,\Psi_s^{(\sigma)}\,(1)$$
$$+ b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_s,$$

wo

$$B^{(p)} = A_{n+1}^{(p)} + A_{n+2}^{(p)} + \ldots + A_s^{(p)},$$

und σ die grösste in $^1/_2\,s$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Hieraus folgt, da

$$B^{(p)} < 1 \qquad \Psi^{(p)} < 1 \qquad C_r < \frac{1}{r}$$

$$b_{n+r} < 4\left[\frac{1.3.\ldots 2n+2r-3}{2\cdot 4.\ldots 2n+2r-2} - \frac{1\cdot 3\ldots 2n+2r-1}{2.4\ldots 2n+2r}\right]$$

und somit

$$b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_s < 4.\frac{1.3\ldots 2n-1}{2\cdot 4.\ldots 2n} < \frac{4}{\sqrt{2n}}$$

ist:
$$2F(n) < B^{(1)} + \frac{1}{2} B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m} B^{(m)}$$
$$+ C_{m+1} + C_{m+2} + \ldots + C_\nu + \frac{4}{\sqrt{2n}}$$
$$< F(m) + B^{(1)} + \frac{1}{2} B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m} B^{(m)} + \frac{4}{\sqrt{2n}},$$

wo $m \leqq \nu$; da überdies nach 6)
$$B^{(p)} < \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p}\right] \frac{dx}{x(1+x)^{n+1}}$$

und der absolute Betrag des Ausdruckes
$$\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p} - \left(\frac{1-i\sqrt{x}}{1+i\sqrt{x}}\right)^{2p} = \frac{4i\sqrt{x}}{1+x}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1+i\sqrt{x}}{1-i\sqrt{x}}\right)^{2p-3} + \ldots\right]$$

nicht grösser als $\frac{8p\sqrt{x}}{1+x}$ ist, so hat man
$$B^{(p)} < \frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{n+1}\sqrt{x}}$$
$$< 4p . \frac{1.3. \ldots .2n-1}{2.4\ldots 2n} < \frac{4p}{\sqrt{2n}}$$
$$B^{(1)} + \frac{1}{2} B^{(2)} + \ldots + \frac{1}{m} B^{(m)} < \frac{4m}{\sqrt{2n}}$$

und demzufolge
$$2F(n) < F(m) + \frac{4(m+1)}{\sqrt{2n}}. \qquad 7)$$

Setzt man nun
$$n = 2^{4^\lambda} \qquad m = 2^{4^{\lambda-1}},$$

so wird
$$\frac{4(m+1)}{\sqrt{2n}} = 2\sqrt{2}\,\frac{\left(1+\frac{1}{2^{4^{\lambda-1}}}\right)}{2^{4^{\lambda-1}}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2^{2\lambda-1}}$$

und man schliesst aus der Ungleichung 7), wenn man beide Seiten mit $2^{\lambda-1}$ multiplicirt

$$2^{\lambda} F\left(2^{4^{\lambda}}\right) < 2^{\lambda-1} F\left(2^{4^{\lambda-1}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda}}$$

oder

$$2^{\lambda} F\left(2^{4^{\lambda}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda}} < 2^{\lambda-1} F\left(2^{4^{\lambda-1}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\lambda-1}}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man $\lambda = 1, 2, \ldots \mu$ setzt,

$$2^{\mu} F\left(2^{4^{\mu}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2^{\mu}} < F(2) + 3\sqrt{2}$$

und da $F(2) < l16 - C_1 - C_2 = l16 - \frac{45}{64}$ ist:

$$F\left(2^{4^{\mu}}\right) < \frac{c}{2^{\mu}},$$

wo

$$c = l16 + 3\sqrt{2} - \frac{45}{64}.$$

Wenn daher ρ eine Zahl von vorgeschriebener Kleinheit ist, so hat man

$$F(n) < \rho,$$

wenn

$$n > 2^{\frac{cc}{\rho\rho}}$$

genommen wird.

Die Richtigkeit der Gleichung (3) für alle Werthe von t, deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, ist eine unmittelbare Folge der Convergenz der Reihe $f(1)$, vorausgesetzt, dass die Wurzel $\sqrt{1-t}$ mit positivem reellen Bestandtheile ausgezogen wird, wie es die Reihenentwickelung für T erheischt.

Setzt man

$$\frac{t}{16}\, e^{f(t)} = R(t)$$

so hat die Reihe $R(t)$ ebenfalls durchwegs positive Coëfficienten, convergirt für dieselben Werthe von t wie $f(t)$ und genügt der Gleichung (2). Man erhält daher für alle Werthe von k^2, deren

absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, mit Ausnahme der Einheit selbst, einen Werth von q durch die Gleichung

$$q = R(k^2).$$

Für die Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots$ von $R(t)$ erhält man aus der Identität

$$\tau_3^2(0, R(t)) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 t + \left(\frac{1\cdot 3}{2.4}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 t^3 + \ldots$$

die Ungleichung

$$a_n < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$